Matice (element. úpravy)

Definice: **Pole** je množina P, spolu s

a) bin. operací $P \times P \to P$, $(a,b) \mapsto a+b$ (sčítání)

b) $\cdot$ 〃 〃 — $(a,b) \mapsto a \cdot b$ (násobení)

c) 2 prvky $0 \neq 1 \in P$ (nula a jednička)

d) zobrazením $P \to P$, $a \mapsto (-a)$ (opačný prvek)

e) zobrazením $P \to P$, $a \mapsto a^{-1}$ (převrácená hodnota)

přičemž musí platit

1) $a+b=b+a$
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$
3) $a+0=a$
4) $a+(-a)=0$
5) $a\cdot b=b\cdot a$
6) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
7) $a\cdot 1=a$
8) $a\neq 0 \Rightarrow a\cdot a^{-1}=1$
9) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Př: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Def: **Matice** A typu $r\times s$ nad polem P je libovolné zobrazení $A: \{1,\dots,r\}\times\{1,\dots,s\}\to P$.
($r,s\in\mathbb{N}$, r… řádky, s… sloupce)

Př: $r=3$, $s=2$, $P=\mathbb{R}$

$A(1,1)=1$
$A(1,2)=2$
$A(2,1)=3$
$A(2,2)=4$
$A(3,1)=5$
$A(3,2)=6$

zjednodušený zápis

	1	2
1	1	2
2	3	4
3	5	6

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$$

Elementární řádkové úpravy matic

Def: A, B .. typu $r \times s$. Matice B vznikla element. řádk. úpravou z matice A $\Leftrightarrow$

1) k i-tému řádku A byl přičten c-násobek j-tého řádku
2) i-tý řádek A byl vynásoben nenulovým prvkem
3) i-tý a j-tý řádek byly vyměněny

Pozn: ke každé úpravě $\exists$ úprava inverzní

Př

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot(-2) \sim \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Def: Matice A, B jsou <u>řádkově ekvivalentní</u>, když z A můžeme vytvořit B konečnou posloupností e.ř. úprav. Značíme $A \sim B$

Tvrzení: Řádková ekvivalence matic je relací ekvivalence.

reflexivita $A \sim A$
symetrická $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
tranzitivita $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Řešení soustav lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rs}x_s &= b_r \end{aligned}$$

$x_1, \dots, x_s$ .. neznámé
$a_{11}, \dots, a_{rs}, b_1, \dots, b_r$ .. koeficienty ($\in \mathbb{R}$)

Př

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{11}{3} \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array}\right) \qquad x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{11}{3},\ x_3 = \frac{4}{3}$$

sestrojíme „rozšířenou matici" soustavy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{rs} & \dots & a_{rs} & b_r \end{array}\right)$$

Tvrzení: Element. řádk. úpravy rozšířené matice soustavy nemění množinu řešení této soustavy.

Důkaz: dokážeme jen pro úpravu přičtení c-násobku i-tého řádku k j-tému

i-tý řádek: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{is}x_s = b_i$
j-tý řádek: $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{js}x_s = b_j$

řešení $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$
tzn. platí

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \dots + a_{is}\xi_s = b_i \qquad (*_1)$$
$$a_{j1}\xi_1 + a_{j2}\xi_2 + \dots + a_{js}\xi_s = b_j \qquad (*_2)$$

chceme dokázat, že $\xi_1, \dots, \xi_s$ splňují také rovnici j-tý řádek + c. i-tý řádek

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{js}x_s + c \cdot (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{is}x_s) = b_j + c \cdot b_i$$

dosadíme řešení

$$\underbrace{a_{j1}\xi_1 + a_{j2}\xi_2 + \dots + a_{js}\xi_s}_{*_1} + c \cdot \underbrace{(a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \dots + a_{is}\xi_s)}_{*_2} \overset{?}{=} b_j + c \cdot b_i$$

$\square$

Def: Matice A je ve <u>schodovitém tvaru</u> $\Leftrightarrow$

1) každý nenulový řádek začíná zleva více nulami než řádek předchozí
2) za nulovým řádkem následují jen nulové řádky

Matice A je v <u>Gauss-Jordanově tvaru</u> $\Leftrightarrow$ je ve schodovitém tvaru +

3) hlavní prvek (1. nenulový) každého řádku je 1
4) všechny prvky ve sloupci nad a pod hlavním prvkem jsou nuly

Tvrzení: Každá matice je řádkově ekvivalentní nějaké matici v Gauss-Jordanově tvaru.

Př viz. příklad se soustavou